

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Москва, 1990

Приводится описание двух методик: по экспериментальной проверке уравнения вращательного движения и по изучению закона сохранения момента импульса. Предназначены для студентов 1-го курса всех специальностей.

Цель работы - изучение и проверка законов динамики вращательного движения твердого тела: уравнения динамики вращательного движения и закона сохранения момента импульса.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц (материальных точек), при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения - поступательное и вращательное. Остальные разновидности движений твердого тела сводятся к одному из основных видов движения или к их совокупности.

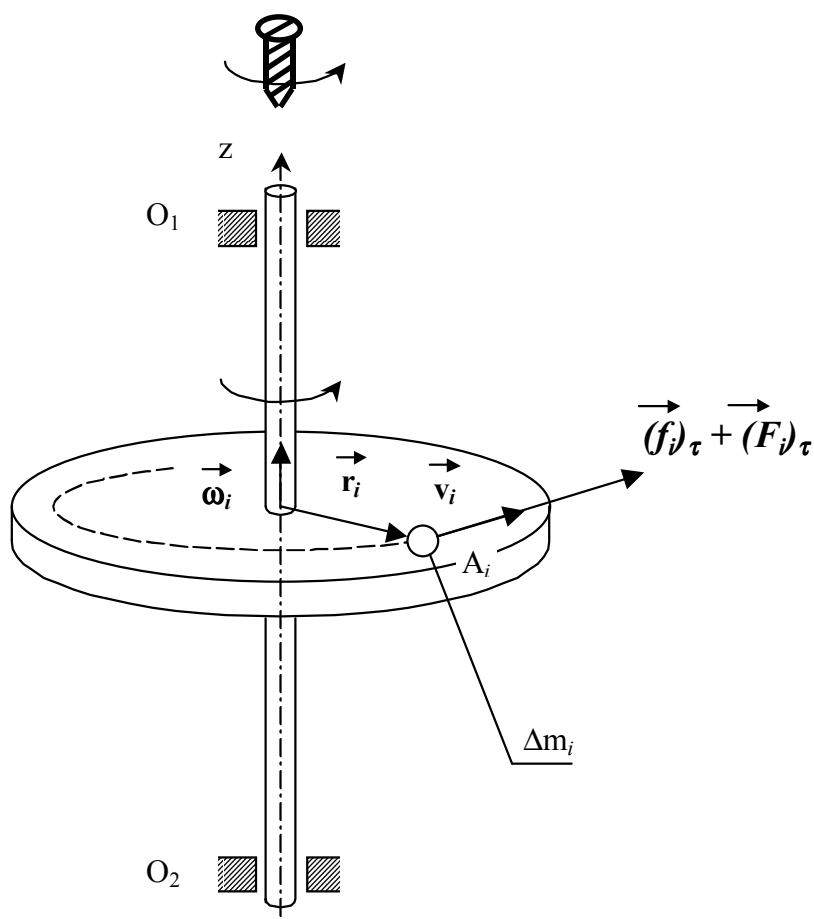


Рис. 1

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси траектории всех его точек являются концентрическими окружностями с центрами, расположенными на одной

прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может проходить через вращающееся тело или располагаться вне его.

Для количественного описания вращательного движения твердого тела используются две кинематические характеристики: угловая скорость вращения ω и угловое ускорение ε . Между угловым ускорением и динамическим воздействием на твердое тело, называемым моментом внешних сил, существует количественная связь - уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Выведем это уравнение на примере тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 1). Ось вращения O_1O_2 выберем в качестве координатной оси z , положительное направление которой совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении, совпадающем с вращением твердого тела.

Мысленно разделим тело на N столь малых частей, что каждую из них можно рассматривать как материальную точку. Например, i -я часть массой Δm_i рассматривается как материальная точка A_i ; она движется вокруг оси по окружности радиуса $r_i \equiv |\vec{r}_i|$, где r_i - радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке A_i , перпендикулярно к этой оси. Линейная и угловая скорости точки A_i связаны соотношением

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega} \vec{r}_i].$$

К материальной точке A_i в общем случае приложены внутренние и внешние силы (внутренние - действуют на материальную точку A_i со стороны других материальных точек $A_k (k \neq i)$ тела; внешние - действуют на материальную точку A_i со стороны других тел). Обозначим равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к точке A_i , через \vec{f}_i , а равнодействующую всех внешних сил, приложенных к той же точке, через \vec{F}_i . Каждую из этих равнодействующих сил удобно разложить на три составляющие: 1) осевую, параллельную оси вращения O_1O_2 , (оси z); 2) радиальную, направленную по радиусу-вектору \vec{r}_i ; 3) тангенциальную, направленную по касательной к окружности радиуса r_i . Если линия действия силы пересекает ось или параллельна ей, то момент силы относительно этой оси равен нулю. Поэтому осевая и радиальная составляющие не могут влиять на движение материальной точки A_i , если ось вращения тела и само тело не деформируются. В то же время тангенциальные составляющие $(\vec{f}_i)_\tau$, $(\vec{F}_i)_\tau$ направленные по касательной к окружности радиуса r_i , влияют на движение точки A_i .

Обозначая через $(a_i)_\tau$ проекцию ускорения точки A_i - на касательную окружности радиуса r_i , запишем согласно второму закону Ньютона

$$\Delta m_i (a_i)_\tau = (f_i)_\tau + (F_i)_\tau \quad (1)$$

Так как угловое ускорение твердого тела ε и тангенциальное ускорение $(a_i)_\tau$ любой его точки, находящейся на расстоянии r_i - от оси вращения, связаны соотношением $(a_i)_\tau = \varepsilon r_i$, то, умножая (1) на r_i , имеем

$$\Delta m_i r_i^2 \varepsilon = [(f_i)_\tau + (F_i)_\tau] r_i \quad (2)$$

Величины $(f_i)_\tau r_i$ и $(F_i)_\tau r_i$ определяют моменты сил \vec{f}_i и \vec{F}_i относительно оси O_1O_2 . Проекция сил $(f_i)_\tau$ и $(F_i)_\tau$ являются положительными или отрицательными скалярными величинами. Поэтому и момент силы относительно оси является также положительной или отрицательной алгебраической величиной и при его записи важно выбрать правильный знак. Момент силы относительно оси положителен, если со стороны ее положительного направления соответствующая сила представляется направленной против движения часовой стрелки.

Уравнения, аналогичные уравнению (2), могут быть записаны для всех N материальных точек маховика. Суммируя их, получим

$$\varepsilon \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N [(f_i)_\tau + (F_i)_\tau] r_i = \sum_{i=1}^N (F_i)_\tau r_i \quad (3)$$

Сумма $\sum_{i=1}^N (f_i)_\tau r_i$ равна нулю, потому что каждая внутренняя сила, действующая на материальную точку A_i со стороны материальной точки A_k ($k \neq i$), согласно третьему закону Ньютона имеет равную по модулю и противоположную по направлению силу, действующую на A_k со стороны A_i . Величина

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = J_z \quad (4)$$

называется моментом инерции тела относительно оси z . Учитывая (4) и вводя обозначение

$$M_z = \sum_{i=1}^N (F_i)_\tau r_i, \quad (5)$$

Уравнение (3) перепишем в виде

$$M_z = J_z \varepsilon \quad (6)$$

Величина M_z в (6) является суммарным моментом всех внешних сил, действующих на отдельные части маховика, относительно оси Z . Уравнение (6), устанавливая количественную связь между M_z и ε , выражает закон динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Отметим, что при вращательном движении момент инерции тела является мерой его инертности, подобно тому, как при поступательном движении мерой инертности тела является его масса.

Так как для твердого тела $J_z = \text{const}$, а $\varepsilon = d\omega/dt$, то уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = M_z \quad (7)$$

Величину $L_z = J_z \omega$ называют моментом импульса (или кинематическим моментом) тела относительно оси Z .

Из уравнения (7) следует очень важный вывод, который называют законом сохранения момента импульса: если $M_z = 0$, то

$$L_z = J_z \omega = \text{const} \quad (8)$$

т.е. если момент внешних сил относительно оси равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси является постоянным. Этот результат получен для одного твердого тела. Путем более сложных доказательств можно обобщить его на случай системы, состоящей из нескольких тел, вращающихся вокруг одной оси. При этом закон сохранения момента импульса принимает следующую формулировку: если суммарный момент внешних сил, приложенных к системе равен нулю, то суммарный момент импульса системы L остается постоянным.

Тело во вращательном движении, так же как и в поступательном движении, обладает кинетической энергией. Любая материальная точка A_i вращающегося тела (рис. 1) движется со скоростью $v_i = \omega r_i$ и обладает кинетической энергией

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (\omega \cdot r_i)^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 r_i^2.$$

Суммируя кинетические энергии всех N материальных точек, вращающегося твердого тела, получаем выражение его кинетической энергии

$$T = \sum_{i=1}^N \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (9)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Задание 1. Экспериментальная проверка уравнения динамики вращательного движения.

Общий вид экспериментальной установки изображен на рис. 2. На вертикальной стойке основания 1 крепятся три кронштейна: верхний 7, средний 18 и нижний 2. На верхнем кронштейне 7 крепится блок 4, который изменяет направление движения эластичной нити 6 с

крючком 5 и подвешенными на нем грузами 8. На среднем кронштейне 18 расположен узел подшипников 12, на оси которого с одной стороны закреплен двухступенчатый шкив 14 диа-

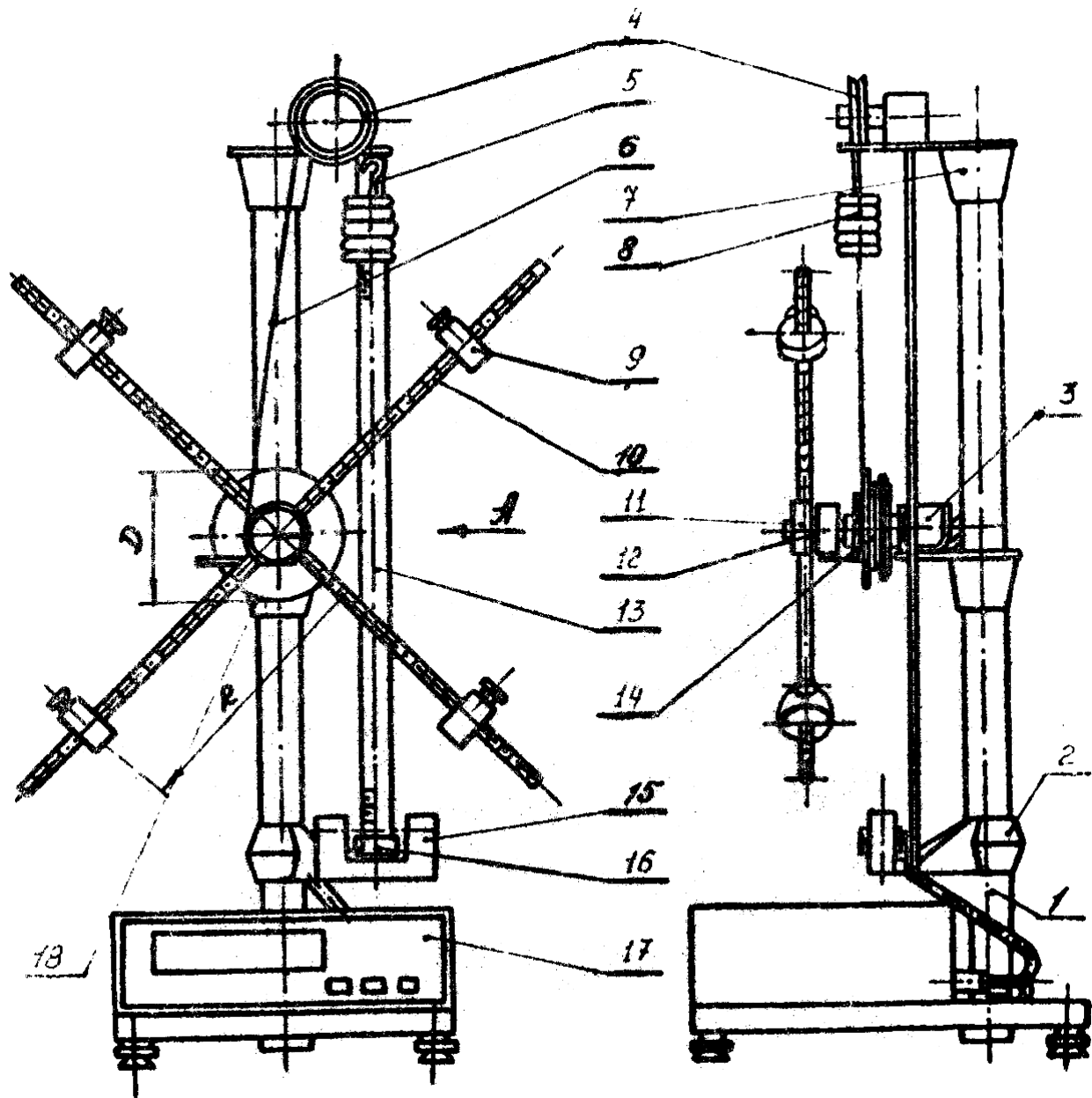


Рис. 2

метром D с приспособлением для закрепления нити 6. На другом конце оси находится крестовина, представляющая собой 4 металлических стержня с нанесенными рисками через каждые 10 мм. Стержни закреплены в бобышке 11 под прямым углом друг к другу.

На каждом стержне могут свободно перемещаться и фиксироваться винтами грузы 9, что дает возможность ступенчато изменять момент инерции крестовины.

На среднем кронштейне 18 крепится также электромагнит 3, который при подаче на него напряжения с помощью фрикциона удерживает опускающиеся грузы 8 и вращающуюся систему (10, 9, 14) в неподвижном состоянии.

На нижнем кронштейне 2 крепится фотоэлектрический датчик 15. Он выдает электрический сигнал на миллисекундомер 17 для окончания счета промежутков времени. На этом же кронштейне крепится резиновый амортизатор 16, о который ударяется груз при остановке.

Маятник снабжен миллиметровой линейкой 13. По ней определяется начальное и конечное положение грузов и, следовательно, пройденный путь.

Миллисекундомер физический 17 - самостоятельный прибор с цифровой индикацией времени, жестко укрепленный на основании 1.

Мысленно разрежем нить с подвешенным грузом в произвольной точке. Этим мы разделим систему на две части: груз, движущийся поступательно, и вращающуюся крестовину. Чтобы движение частей установки не изменилось, приложим к концам нити в месте разреза силы натяжения нити F .

Запишем уравнение динамики поступательного движения ($ma = \Delta F$) для падающего груза m_i , на который действуют две противоположно направленные силы; сила тяжести и сила натяжения нити

$$m_i a = m_i g - F, \quad (10)$$

откуда

$$F = m_i (g - a).$$

Ускорение падающего груза

$$a = \frac{2h}{\tau^2}, \quad (11)$$

Где τ – время падения груза с высоты h .

Запишем уравнение динамики вращательного движения для крестовины, на которую действует вращающий момент, создаваемый силой натяжения нити F

$$J_z \varepsilon = M_z = F \cdot r = F \frac{D}{2} \quad (12)$$

где J_z , - момент инерции вращающейся части системы относительно оси вращения z . Так как тангенциальное ускорение периферийных точек шкива, отстоящих от оси вращения на расстоянии z , равно ускорению груза, то

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2a}{D} \quad (13)$$

откуда, с учётом (11) получим

$$\varepsilon = \frac{4h}{D\tau^2} \quad (14)$$

Общий момент инерции крестовины с грузами

$$J_z = J_0 + 4m_R R^2 \quad (15)$$

Где J_0 - момент инерции собственно крестовины (без грузиков);

$4m_R R^2$ – сумма моментов инерции четырех грузиков, отстоящих от оси вращения на расстоянии R (из-за малости размеров грузиков, по сравнению с R , принимаем их за материальные точки). Из соотношений (10), (12), (13) получим

$$\varepsilon = \frac{2m_i g D}{4J_z + m_i D^2} \quad (16)$$

или с учётом (15)

$$\varepsilon = \frac{2m_i g D}{4J_0 + 16m_R R^2 + m_i D^2} \quad (17)$$

Выполнение эксперимента

1. Ознакомиться с установкой.
2. Включить в сеть шнур питания миллисекундомера.
3. Намотать нить с основным грузом $m = 58,2$ г на малый шкив. Нить следует наматывать на шкив в один слой, предварительно вставив петельку в вырез на шкиве. Конец нити с грузом перекинуть через блок 4.
4. Установить нижний край груза по шкале на деление 6 см.
5. Включить сеть. При этом сработает электромагнитный фрикцион и зафиксирует положение грузов, а также загорятся лампочки фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера.

6. Нажать кнопку СБРОС и убедиться, что на индикаторах установились нули.

7. Нажать кнопку ПУСК, удерживая ее в этом состоянии до момента, когда основной груз пересечет оптическую ось фотодатчика. При нажатии кнопки ПУСК обесточивается электромагнит и основной груз приходит в движение, а миллисекундомер начинает отсчет времени. При пересечении грузом оптической оси датчика счет времени прекращается.

8. При пересечении основным грузом оси фотодатчика отпустить кнопку ПУСК, записать показания миллисекундомера и выключить СЕТЬ.

9. Указанное в пп. 3...8 проделать по три раза с грузами $m_1=58,2$ г; $m_2=(58,2+51,1)$ г; $m_3=(58,2+51,1+51,4)$ г; $m_4=(58,2+51,1+53,6)$ г; $m_5=(58,2+51,5+51,4+53,6+54,2)$ г.

Результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

$h=43,5$ см, $D=42$ мм.

№ пп.	m, кг	τ_i , с	$\langle \tau \rangle$, с	$\Delta \langle \tau \rangle$, с	ϵ , с ⁻²	$\Delta \epsilon$, С ⁻²
1	0,0582					
5	0,2685					

10. По формуле (14) вычислить угловое ускорение ϵ для различных значений m и результаты завести в табл. I.

11. Закрепить передвижные грузы $m_R = 200,07$ г на стержнях крестовины на одинаковом расстоянии $R = 8$ см от оси вращения, учитывая при этом, что радиус бобышки 11 равен 2 см. Высота передвижных грузов также равна 2 см.

12. Проделать указанное в пп. 3...8 по три раза для пяти различных расстояний R, увеличивая их на 4 см. Массу падавшего груза оставить во всех опытах 58,2 г. Нить наматывать на большой шкив.

13. По формуле (14) вычислить ϵ и $1/\epsilon$ и результаты занести в таблицу 2

Таблица 2

$m=58,2$ г, $h=43,5$ см, $D=84$ мм

№ пп.	R, м	R^2 , м ²	τ_i , с	$\langle \tau \rangle$, с	$\Delta \langle \tau \rangle$, с	ϵ , с ⁻²	$1/\epsilon$, с ²	$\Delta \epsilon$, С ⁻²
1	0,08							
5	0,24							

Меры безопасности.

1. К работе допускаются лица, изучившие установку и принцип ее работы.
2. Перед началом работы убедиться, что установка заземлена.
3. При работе необходимо следить за тем, чтобы в момент, окончания эксперимента (в момент пересечения основным грузом оптической оси фотодатчика) кнопка ПУСК была отпущена. При этом должен сработать электромагнитный фрикцион и затормозить крестовину.
4. При работе с передвижными грузами необходимо следить, чтобы грузы находились на одинаковом расстоянии от оси вращения и были жестко зафиксированы с помощью винтов.

Рекомендации для графического представления результатов

1. График следует строить на миллиметровой бумаге.
2. Масштаб выбирают так, чтобы график имел примерно равные размеры по длине и по высоте.
3. Принято откладывать по оси абсцисс аргумент (т.е. независимую переменную), а по оси ординат - зависимую от него величину (исследуемую функцию).
4. По осям координат записывается символ величины, откладываемой вдоль этой оси, рядом указывается единица измерения. На осях наносится разметка шкалы измерения в выбранном масштабе.
5. Экспериментальные точки наносятся на график так, чтобы они были хорошо видны.
6. Погрешности измерений, соответствующие экспериментальным точкам, изображают на графике отрезком (рис. 3а или б). Масштаб и интервал измерений выбирают так, чтобы точки не сливались между собой. Погрешности на графике изображаются для всех экспериментальных точек

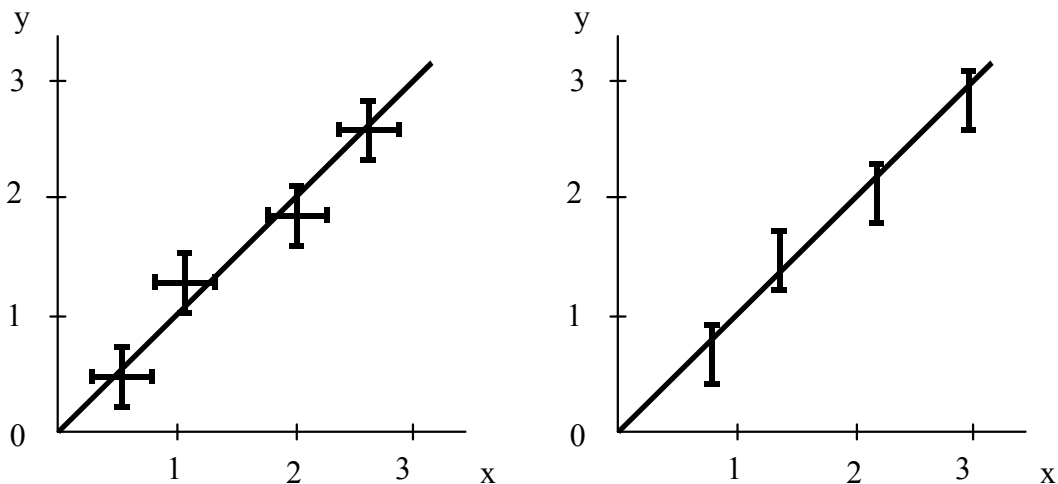


Рис. 3

7. Экспериментальная кривая проводится по экспериментальным точкам, возможно ближе к ним. При этом некоторые экспериментальные точки могут оказаться не на кривой, а рядом с ней. Надо иметь в виду, что точки - результат измерений, а проведенная кривая - это лишь толкование полученного экспериментатором результата.

8. Аналитическую формулу перед построением графика удобно преобразовать так, чтобы ожидаемая зависимость была линейной, т.е. имела вид прямой линии.

Пример 1. Если исследуемая функция имеет вид $U = a/V$, где $a = \text{const}$, то по осям координат следует откладывать величины $x = 1/V$, $y = V$, тогда функция $y = ax$ изобразится на графике в виде прямой линии.

Пример 2. Если исследуемая зависимость $U = aV^2$ то по осям координат следует откладывать величины $x = V^2$, $Y = U$, тогда $y = ax$ на графике будет прямой линией.

Графическая проверка ожидаемых зависимостей $\varepsilon=f_1(m_i)$ и $1/\varepsilon=f_2(R^2)$

1. В данной работе для величины углового ускорения ε мы получили теоретическую зависимость (16). Так как в нашем эксперименте $4J_z \gg m_i D^2$, то можно пренебречь величиной $m_i D^2$ в знаменателе уравнения (16), и теоретически ожидаемая зависимость ε от m_i будет иметь вид:

$$\varepsilon = \frac{2m_i g D}{4J_z} = c m_i \quad (18)$$

Где c – постоянная.

Экспериментальный график этой зависимости должен представлять собой прямую линию.

2. Поскольку $(4J_0 + 16m_R R^2) \gg m_i D^2$, то в знаменателе уравнения (17) можно пренебречь величиной $m_i D^2$.

Теоретически ожидаемая зависимость ε от R примет вид:

$$\varepsilon = \frac{2m_i g D}{4J_0 + 16m_R R^2} \quad (19)$$

Это нелинейная зависимость. Чтобы графически проверить, выполняется или нет такая функциональная зависимость на опыте, удобно преобразовать уравнение (19) так, чтобы зависимость была линейной

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{4J_0 + 16m_R R^2}{2m_i g D} = \frac{4J_0}{2m_i g D} + \frac{8m_R R^2}{m_i g D} = A + B \cdot R^2, \quad (20)$$

где A и B - постоянные.

Заменим переменные $y=1/\varepsilon$ и $x=R^2$, тогда теоретически ожидаемая зависимость имеет вид прямой: $y = A + Bx$.

Оценка погрешностей.

1. Оценить погрешности измерения величин ε и $1/\varepsilon$ и нанести их на графики для экспериментальных точек.

а) В данном эксперименте можно пренебречь инструментальными погрешностями измерения величины $\langle \tau \rangle$, так как их влияние на полную погрешность этой величины мало по сравнению с влиянием случайных погрешностей. Случайную погрешность измерения $\Delta \langle \tau \rangle$ следует рассчитать (из полученных данных) по формуле

$$\Delta \langle \tau \rangle = t_{\alpha, n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tau_i - \langle \tau \rangle)^2}{n(n-1)}},$$

где n - число опытов, из которых определяется $\langle \tau \rangle$; $t_{\alpha, n}$ - коэффициент Стьюдента, который для надежности $\alpha = 0,68$ и числа измерений $n=3$ имеет значение $t_{\alpha, n}=1,3$.

б) Погрешность результата косвенных измерений величин определяется в основном погрешностью, с которой измерено время τ , так как погрешности измерения величин D и R невелики и их влияние на погрешность ε мало.

Для каждой экспериментальной точки графика следует рассчитать погрешность ε и $1/\varepsilon$ по формулам

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon \frac{2\Delta \langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle}, \quad \Delta \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2\Delta \langle \tau \rangle}{\varepsilon \langle \tau \rangle}$$

2. По экспериментальным данным табл. 1 и 2 построить графики $\varepsilon=f_1(m_i)$ и $1/\varepsilon=f_2(R^2)$. Если экспериментальные точки в пределах погрешностей измерений укладываются на прямую, то это значит, что выполняются ожидаемые зависимости между величинами ε и m_i , $1/\varepsilon$ и R^2 , а также, существенных систематических погрешностей при измерениях не было.

Задание 2. Изучение закона сохранения момента импульса система.

Лабораторная установка для изучения закона сохранения момента импульса системы (рис. 4) состоит из вращающейся вокруг оси O_1O_2 колонки 25 с закрепленными на ней диском 23 и

стержнем 21.

Вдоль стержня 21 могут скользить два цилиндра 22 одинаковой массы, при перемещении которых от колонки до ограничителей 33 происходит резкое возрастание момента инерции

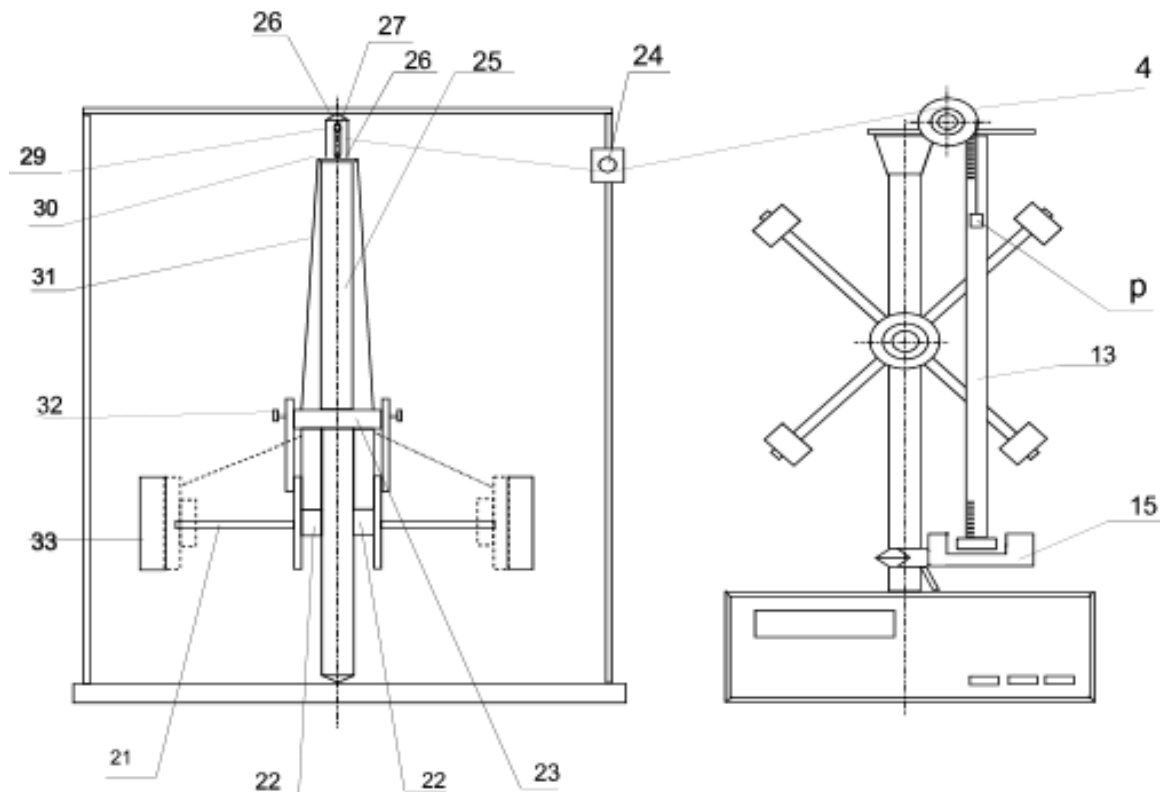


Рис. 4

вращающейся системы.

Вдоль колонки может скользить кольцо 26 с пластинкой 27, имеющей отверстие 29 в своей верхней части для подвешивания ее на штифте 28. Кольцо снабжено ушками 30, к которым привязаны нити 31. Эти нити пропускаются через отверстия в диске 23 и прикрепляются к цилиндрам 22, удерживая их до определенного момента вблизи колонки 25.

К противоположному концу штифта 28 прикреплена переброшенная через блоки 24 и 4 нить Т с грузом Р на конце. При опускании груза Р момент силы натяжения нити 7 заставляет колонку вращаться равноускоренно. Изменение положения груза Р отсчитывается по шкале линейки 13. На диске 23 имеются специальные крепления 32, которыми можно удерживать, не пользуясь нитями 31, цилиндры 22 около колонки 25, что необходимо при выполнении эксперимента.

Перед выполнением эксперимента следует проверить взаимное положение установок (задания 1 и 2). Для этого нить 7 надо аккуратно (виток к витку) намотать на колонку 25, обматывая при этом и пластинку 27. В начальном положении нижний край груза Р находится чуть выше оптической оси верхнего фотодатчика (если установка снабжена двумя датчиками). В отсутствие верхнего фотодатчика начальное положение груза Р определяется по шкале миллиметровой линейки 13.

Предоставив колонке 25 возможность равноускоренно вращаться, внимательно следим за опускающимся грузом. В момент, когда нить размоталась полностью, нижний край груза должен пересечь оптическую ось фотодатчика 15. Если этого не произошло, взаимное положение установок следует изменить с учетом сделанного замечания.

На данной установке можно провести три опыта.

Опыт 1. Движение система с минимальным моментом инерции J_1 .

Чтобы момент инерции системы J_1 стал минимальным, максимально приблизим цилиндры 22 к колонке 25 и закрепим их в таком положении с помощью креплений 32. После этого нить Т ак-

курратно наматываем на колонку, обматывая при этом пластинку 27. Выставив начальное положение груза на линейке 33, отпускаем его, одновременно включая миллисекундомер.

Груз Р начинает равноускоренно опускаться, а колонка 25 равноускоренно вращаться под действием момента силы натяжения нити Т. Когда груз Р, пересекая оптическую ось фотодатчика 15, останавливается, пройдя расстояние h_0 (нить размоталась на всю длину), счет времени прекращается. Показания миллисекундомера соответствуют времени τ_1 падения груза Р. К моменту остановки груза Р колонка 25 приобретает максимальную кинетическую энергию. После остановки груза колонка по инерции продолжает вращаться, но уже равнозамедленно. Нить 7 начинает снова навиваться на колонку, и груз Р равнозамедленно поднимается вверх. При этом совершается работа против сил тяготения за счет уменьшения кинетической энергии колонки. Когда кинетическая энергия колонки уменьшится до нуля, груз Р опять остановится, поднявшись на высоту h_1 , отсчитанную от нижней точки, которую достиг груз при опускании. При подъеме груз Р не дойдет до своего первоначального положения, так как потенциальная энергия груза не восстанавливается до первоначального значения вследствие потерь части механической энергии системы на совершение работ A_0 (против сил трения при опускании груза) и A_1 (при подъеме груза), а также на энергию колебательного движения груза, возникающего при его резкой остановке и т.п.

Описанный процесс вращения механической системы в этом опыте можно проиллюстрировать графиком зависимости угловой скорости ω от времени τ (рис 5. участок OAB).

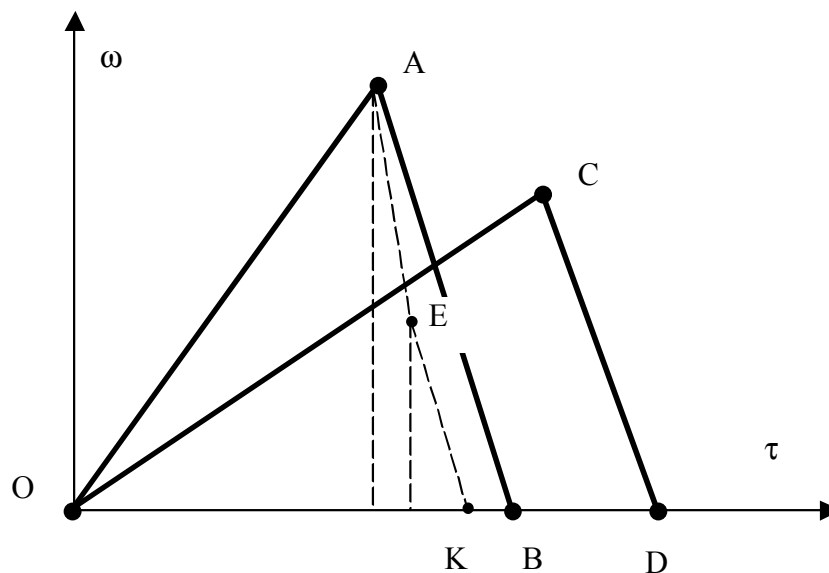


Рис. 5

Запишем уравнение динамики для падающего груза Р и вращающейся системы, а также уравнение связи между угловым ускорением ε_1 точек, лежащих на поверхности колонки (это ускорение совпадает с ускорением движения груза Р вниз):

$$ma_1 = mg - F_1, \quad (21)$$

$$J_1 \varepsilon_1 = F_1 r, \quad (22)$$

$$a_1 = \varepsilon_1 r, \quad (23)$$

где m - масса груза Р; a_1 ускорение груза при его движении вниз; F_1 - сила натяжения нити; r - радиус колонки; ε_1 - угловое ускорение вращающейся части системы; g - ускорение свободного падения; J_1 - момент инерции вращающейся части системы относительно оси вращения O_1O_2 ; $F_1 r$ - момент силы F_1 относительно оси O_1O_2 .

Выразив из уравнения (23) ε_1 подставим его в уравнение (22). Уравнение (21) умножим на g и, сложив почленно с уравнением (22), будем иметь

$$\frac{(J_1 + mr^2)a_1}{r} = mgr. \quad (24)$$

Учитывая, что $mr^2 \ll J_1$, из (24) получим

$$J_1 = \frac{mgr^2}{a_1} \quad (25)$$

С другой стороны, ускорение падающего груза Р

$$a_1 = \frac{2h_0}{\tau_1^2} \quad (26)$$

где h_0 и τ_1 - высота и время падения груза Р.

Из (25) и (26) получим

$$J_1 = \frac{mgr^2 r_1^2}{2h_0} \quad (27)$$

Запишем закон сохранения механической энергии системы для всего опыта 1

$$mgh_0 = mgh_1 + A_0 + A_1 \quad (28)$$

Значения величин A_0 и A_1 можно определить экспериментально, исходя из следующих соображений. Пусть груз при неизменном наименьшем моменте инерции J_1 опустился с высоты h_0 и поднялся на высоту h_1 (опыт 1). Энергия, равная разности потенциальных энергий груза в начальном и конечном положениях, была затрачена на работу против сил трения за все время движения системы.

Работа A_0 , затраченная на преодоление трения при опускании груза с высоты h_0 , составляет какую-то часть α_0 его начальной потенциальной энергии

$$A_0 = \alpha_0 mgh_0 \quad (29)$$

По аналогии, работа A_1 против сил трения при подъеме груза на высоту h_1

$$A_1 = \alpha_1 mgh_1 \quad (30)$$

Следует заметить, что значения коэффициентов α_0 и α_1 в соотношениях (29) и (30) весьма малы. В этом можно убедиться, определив экспериментально работу против сил трения за все время движения системы и сравнив полученное значение с потенциальной энергией груза. Кроме того, очевидно, что величины α_0 и α_1 достаточно близки. Эти два замечания позволяют в дальнейшем с целью упрощения математических выкладок коэффициенты считать равными, т. е.

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha.$$

С учетом принятого допущения преобразуем (28)

$$mgh_0 - mgh_1 = \alpha mgh_0 + \alpha mgh_1,$$

откуда

$$\alpha = (h_0 - h_1) / (h_0 + h_1) \quad (31)$$

Опыт 2. Движение системы с максимальным моментом инерции J_2 . Увеличение момента инерции до максимального значения J_2 достигается раздвижением цилиндров 22 на максимальное расстояние, т. е. до ограничителей 33. После этого, как и в опыте 1, измеряют h_0 - расстояние, проходимое грузом Р при опускании, τ_2 , - время падения груза Р, h_2 - высоту подъема груза после остановки.

Полностью повторяя рассуждения, приведенные в описании опыта 1, получим

$$J_2 = \frac{mgr^2 r_2^2}{2h_0} \quad (32)$$

$$\beta = \frac{h_0 - h_2}{h_0 + h_2} \quad (33)$$

где β - аналог α из опыта 1.

График зависимости $\omega(\tau)$ в этом случае будет иметь вид, представленный на рис. 5 (участок ОСД).

Из равенств (27) и (32) следует

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \quad (34)$$

Опыт 3. Движение системы с изменяющимся моментом инерции от J_1 до J_2 .

В начале опыта цилиндры 22 нужно расположить вплотную к поверхности колонки 25 (при этом момент инерции J_1 минимален), но фиксировать их в этом положении не креплениями 32, а нитями 31, привязанными к ушам 30 кольца 26. Кольцо 26 с пластинкой 27 подвесить на штифт 28, и намотать нить Т на колонку 25, обматывая при этом и пластинку 27.

Как и в предыдущих опытах, следует заметить начальное положение груза Р по линейке 13, отпустить его, включив одновременно секундомер для определения времени τ_1 опускания груза до момента его остановки. Когда груз Р останавливается, пройдя расстояние h_0 , нить 7 своим рывком смещает подвижный штифт 28, и кольцо 26 с пластинкой 27 падают на диск 23. Нити 31 уже больше не удерживают цилиндры 22. Сила трения между цилиндрами и стержнем 21 мала и не может удержать их вблизи колонки 25. Поэтому цилиндры очень быстро соскальзывают к концам стержня 21, где происходит их неупругий удар об ограничитель 33.

Перемещение цилиндров 22 к ограничителям 33 резко увеличивает момент инерции системы J и уменьшает ее угловую скорость ω . Момент инерции системы изменяется и в соответствии с законом сохранения момента импульса можно записать

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

откуда

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Как правило, в реальных условиях физические законы сохранения выполняются с определенной степенью точности, так как при проведении эксперимента не всегда достаточно строго выполняются условия, при которых эти законы справедливы. С целью определения степени выполнимости закона сохранения момента импульса в конкретных условиях на данной экспериментальной установке введем в последнее соотношение величину k :

$$\frac{J_1}{J_2} = k \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (35)$$

Чем ближе значение коэффициента k к 1, тем меньше отличия реальных условий эксперимента на данной установке от условий, при которых справедлив закон сохранения момента импульса.

Зависимость угловой скорости от времени $\omega(\tau)$ в опыте 3 имеет вид, представленный на рис. 5 (участок ОАЕК, пунктир).

Процесс движения системы в опыте 3 можно разделить на три стадии. В первой стадии система, имея наименьший момент инерции J_1 движется равноускоренно (рис. 5, участок ОА). Во второй стадии быстро увеличивается момент инерции (участок АЕ) и резко уменьшается угловая скорость. В третьей стадии система, имея наибольший момент инерции J_2 вращается равнозамедленно и останавливается (участок ЕК).

Для определения отношения угловых скоростей воспользуемся законом сохранения энергии. В первой стадии опыта 3 при опускании груза с высоты h_0 имеем

$$mgh_0 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 + A_0 \quad (36)$$

При этом

$$v_1 = \omega_1 r \quad (37)$$

где mgh_0 - потенциальная энергия груза в верхнем положении; $m v_1^2 / 2$ - кинетическая энергия поступательного движения груза в нижнем положении; $J_1 \omega_1^2 / 2$ - кинетическая энергия вращательного движения в конце первой стадии движения.

Учитывая (37) и то, что $m r^2 \ll J_1$, получим $v_1^2 / 2 \ll J_1 \omega_1^2 / 2$. Это позволяет упростить уравнение (36):

$$mgh_0 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + A_0 \quad (38)$$

откуда

$$\omega_1^2 = \frac{2(mgh_0 - A_0)}{J_1} \quad (39)$$

Для третьей стадии опыта 3 при подъеме груза на высоту h , можно записать

$$0,5 J_2 \omega_2^2 = mgh_3 + A_3$$

откуда

$$\omega_2^2 = \frac{2(mgh_3 + A_3)}{J_2} \quad (40)$$

Из соотношений (34), (35), (39), (40) получим

$$k = \frac{\tau_1}{\tau_2} \sqrt{\frac{mgh_0 - A_0}{mgh_3 + A_3}} \quad (41)$$

где работа A_0 может быть определена с учетом (31) и (29), а работа A_3 - с учетом (29) и (33), т. е.

$$A_0 = \alpha \cdot mgh_0 = \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1} mgh_0 \quad (42)$$

$$A_3 = \beta \cdot mgh_3 = \frac{h_0 - h_2}{h_0 + h_2} mgh_3 \quad (43)$$

Подставляя в соотношение (41) значения A_0 и A_3 из (42) и (43), получим

$$k = \frac{\tau_1}{\tau_2} \sqrt{\frac{h_1(h_0 + h_2)}{h_3(h_0 + h_1)}} \quad (44)$$

Это уравнение служит для экспериментальной проверки выполнимости закона сохранения момента импульса в данном эксперименте.

Выполнение эксперимента.

Три описанных выше опыта проделать по пять раз и результаты измерений занести в табл. 3.

Предварительно тщательно измерить расстояние h_0 от верхнего положения груза до самого нижнего (когда нить полностью размоталась). Во всех опытах груз должен начинать движение с одной и той же высоты. Тогда h_0 будет заданной постоянной величиной, а $h_1, h_2, h_3, \tau_1, \tau_2$, - величинами, измеряемыми независимыми способами.

Таблица 3

i	h _{1i} , см	h _{2i} , см	h _{3i} , см	τ _{1i} , с	τ _{2i} , с
1					
.					
.					
.					
5					

Значение h_0 , а также рассчитанные по данным табл. 3 средние значения измеренных величин $\langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle, \langle h_3 \rangle, \langle \tau_1 \rangle, \langle \tau_2 \rangle$ занести в табл. 4.

Таблица 4

h ₀	⟨h ₁ ⟩	⟨h ₂ ⟩	⟨h ₃ ⟩	⟨τ ₁ ⟩	⟨τ ₂ ⟩	k

Значение величины k найти по формуле

$$k = \frac{\langle \tau_1 \rangle}{\langle \tau_2 \rangle} \sqrt{\frac{\langle h_1 \rangle (h_0 + \langle h_2 \rangle)}{\langle h_3 \rangle (h_0 + \langle h_1 \rangle)}}$$

и занести в табл. 4.

$\langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle, \langle h_3 \rangle, \langle \tau_1 \rangle, \langle \tau_2 \rangle$

Анализ результатов и оценка погрешностей измерений.

Чтобы на основании полученного значения k сделать правильный вывод о выполняемости закона сохранения момента импульса в данном эксперименте, необходимо оценить точность, с которой определена величина k .

При рассмотрении экспериментальных данных табл. 3 обнаруживаются случайные погрешности измерений, так как наблюдается разброс результатов повторных измерений величин h_1, h_2, h_3, τ_1 и τ_2 . Оценим величину этих случайных погрешностей. Зададим коэффициент надежности $\alpha=0,95$ и, взяв коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}=2,6$ (для $n=5$), найдем случайные погрешности по формуле

$$\Delta \langle \tau_1 \rangle = t_{\alpha,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle r_1 \rangle - \langle r_{1i} \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

Аналогично найдем случайные погрешности $\Delta \langle h_1 \rangle, \Delta \langle h_2 \rangle, \Delta \langle h_3 \rangle, \Delta \langle \tau_2 \rangle$ Результаты вычислений занести в табл. 5 и 6.

Инструментальные погрешности при измерении каждой из указанных пяти величин существенно меньше случайных погрешностей. Следовательно, полные погрешности измерения величин $h_1, h_2, h_3, \tau_1, \tau_2$ можно считать равными случайным, приведенным в табл. 6.

Таблица 5

i	$(h_{1i} - \langle h_1 \rangle)^2$	$(h_{2i} - \langle h_2 \rangle)^2$	$(h_{3i} - \langle h_3 \rangle)^2$	$(\tau_{1i} - \langle \tau_1 \rangle)^2$	$(\tau_{2i} - \langle \tau_2 \rangle)^2$
1					
.					
.					
5					
Σ					

Таблица 6

$\Delta \langle h_1 \rangle$	$\Delta \langle h_2 \rangle$	$\Delta \langle h_3 \rangle$	$\Delta \langle \tau_1 \rangle$	$\Delta \langle \tau_2 \rangle$

Погрешность результата косвенных измерений величины k рассчитать по формуле

$$\Delta k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta \langle \tau_1 \rangle}{\langle \tau_1 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle \tau_2 \rangle}{\langle \tau_2 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle h_1 \rangle}{2 \langle h_1 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle h_3 \rangle}{2 \langle h_3 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2} \Delta \langle h_2 \rangle}{h_0 + \langle h_2 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2} \Delta \langle h_1 \rangle}{h_0 + \langle h_1 \rangle}\right)^2}$$

Окончательный результат следует представить в виде

$$k \pm \Delta k \text{ при } \alpha = 0,95$$

Если число 1 принадлежит доверительному интервалу ($k \pm \Delta k$), то можно сделать вывод, что в данном эксперименте закон сохранения момента импульса выполняется с относительной точностью, не меньшей $\left(\frac{\Delta k}{k} \cdot 100\%\right)$.

Замечание. Если число 1 не попадает в доверительный интервал, то мерой выполнимости закона сохранения момента импульса может случить близость границы доверительного интервала к 1.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается специфика динамики вращательного движения?
2. Каков физический смысл момента инерции тела?
3. Какова роль и значение теоремы Штейнера при расчете моментов инерции тел?

4. Как определяются момент силы и момент импульса? Чем различаются моменты этих векторов (F и P) относительно центра (точки) и относительно оси?
5. Как формулируется и при каких условиях справедлив закон сохранения момента импульса?
6. В каком случае закон сохранения момента импульса можно применять к неизолированной системе?
7. Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
8. Каковы причины погрешностей при измерении величин в экспериментах заданий 1 и 2?
9. Какие, погрешности измерений в данных экспериментах являются систематическими, а какие случайными?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 Т. М.: Наука, 1987. - Т. I. - 432 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. - М.: Наука, 1979. - 519 с.
3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. - М.: Высшая школа, 1986. - 320 с.
4. Иродов И. Е. Основные законы механики. - М.: Высшая школа, 1985. - 248 с.